Unidad III: Métodos de solución de sistemas de ecuaciones

3.1 Métodos iterativos

El primer método iterativo para solucionar un sistema linear apareció probablemente en una letra de Gauss a un estudiante el suyo. Él propuso el solucionar de un sistema 4 by-4 de ecuaciones en varias ocasiones solucionando el componente del cual la residual era la más grande.

La teoría de métodos iterativos inmóviles fue establecida sólidamente con el trabajo de D.M. El comenzar joven en los años 50. Método conyugal del gradiente también fue inventado en los años 50, con progresos independientes cerca Cornelius Lanczos, Magnus Hestenes y Eduard Stiefel, solamente su naturaleza y aplicabilidad eran entendidas mal en ese entonces. Solamente en los años 70 era realizó que el conjugacy basó métodos trabaja muy bien para ecuaciones diferenciales parciales, especialmente el tipo elíptico.

Un método iterativo es un método que progresivamente va calculando aproximaciones a la solución de un problema. En Matemáticas, en un método iterativo se repite un mismo proceso de mejora sobre una solución aproximada: se espera que lo obtenido sea una solución mas aproximada que la inicial. El proceso se repite sobre esta nueva solución hasta que el resultado mas reciente satisfaga ciertos requisitos. A diferencia de los métodos directos, en los cuales se debe terminar el proceso para tener la respuesta, en los métodos iterativos se puede suspender el proceso al termino de una iteración y se obtiene una aproximación a la solución.

3.2 Sistemas de ecuaciones no lineales

Un sistema de ecuaciones es no lineal, cuando al menos una de sus ecuaciones no es de primer grado.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

La resolución de estos sistemas se suele hacer por el método de sustitución, para ello seguiremos los siguientes pasos:

1º Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones, preferentemente en la de primer grado.

y = 7 − x

2º Se sustituye el valor de la incógnita despejada en la otra ecuación.

x2 + (7 − x)2 = 25

3º Se resuelve la ecuación resultante.

x2 + 49 − 14x + x2 = 25

2x2 − 14x + 24 = 0

x2 − 7x + 12 = 0

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{matrix} \nearrow x_1 = 4 \\ \searrow x_2 = 3 \end{matrix}$$

4º Cada uno de los valores obtenidos se sustituye en la otra ecuación, se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita.

x = 3	y = 7 − 3	y = 4
x = 4	y = 7 − 4	y = 3

3.3 Iteración y convergencia de sistemas de ecuaciones

En general, en todos los procesos iterativos para resolver el sistema $Ax=b$ se recurre a una cierta matriz Q, llamada matriz *descomposición*, escogida de tal forma que el problema original adopte la forma equivalente:

$$Qx = (Q-A)x+b \qquad (62)$$

La ecuación (62) sugiere un proceso iterativo que se concreta al escribir:

$$Qx^{(k)} = (Q-A)x^{(k-1)} + b \quad (k \geq 1) \qquad (63)$$

El vector inicial $x^{(0)}$ puede ser arbitrario, aunque si se dispone de un buen candidato como solución éste es el que se debe emplear. La aproximación inicial que se adopta, a no ser que se disponga de una mejor, es la idénticamente nula $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. A partir de la ecuación (63) se puede calcular una sucesión de vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ... Nuestro objetivo es escoger una matriz Q de manera que:

- se pueda calcular fácilmente la sucesión [$x^{(k)}$].
- la sucesión [$x^{(k)}$] converja rápidamente a la solución.

Como en todo método iterativo, deberemos especificar un criterio de convergencia δ y un número máximo de iteraciones M, para asegurar que el proceso se detiene si no se alcanza la convergencia. En este caso, puesto que x es un vector, emplearemos dos criterios de convergencia que se deberán satisfacer simultáneamente:

1.

El módulo del vector diferencia, $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$, partido por el módulo del vector *x*, $\|x^{(k)}\|$ deberá ser menor que la convergencia deseada:

$$\mathrm{ABS}\left(\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|}{\|x^{(k)}\|}\right) \leq \delta$$

2. La diferencia relativa del mayor elemento en valor absoluto del vector $x^{(k)}$, $x_m = \text{Máx}\{x_i\}$, deberá ser diez veces menor que δ:

$$\mathrm{ABS}\left(\frac{x_m^{(k)} - x_m^{(k-1)}}{x_m^{(k)}}\right) \leq \frac{\delta}{10}$$

3.4 Aplicaciones